JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Note sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 342-349.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A26_0>

NOTE

Sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires ;

PAR J. LIOUVILLE.

Soient n un nombre entier positif, x une fonction de t dont nous désignerons par x', x'',.... $x^{(n)}$ les dérivées successives, prises par rapport à t, et P une fonction quelconque de t, x, x',... $x^{(n-1)}$. Si l'on sait intégrer l'équation différentielle de l'ordre n,

$$(1) \qquad x^{(n)} = \mathrm{P},$$

il sera facile d'intégrer ensuite par approximation l'équation nouvelle

$$(2) \qquad x^{(n)} = \mathrm{P} + \mathrm{Q},$$

dans laquelle on suppose que le terme Q reste toujours très petit. Et même si Q désigne une fonction donnée quelconque de t, et que l'équation (1) soit linéaire, on parvient à intégrer complétement l'équation (2). La méthode que les géomètres suivent ordinairement pour atteindre ce but consiste à faire varier les constantes arbitraires contenues dans l'intégrale complète $x = f(t, a, b, \ldots c)$ de l'équation (1), de telle sorte que l'équation (2) soit satisfaite aussi par $x = f(t, a, b, \ldots c)$. Cela revient au fond à remplacer l'inconnue x par n inconnues a, b,... c, entre lesquelles on pourra d'ailleurs établir à volonté $(n - 1)$ relations. Les relations dont nous parlons deviennent très simples quand on assujétit les valeurs de dx, d^2x,... $d^{n-1}x$ à conserver la même forme dans le cas de l'équation (2) et dans le cas de l'équation (1).

Pour déterminer $a, b, \ldots c$ en fonction de t, on obtient dans cette hypothèse les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{dx}{db}\cdot\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dc}{dt}=0,\\
&\frac{dx'}{da}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{dx'}{db}\cdot\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{dx'}{dc}\cdot\frac{dc}{dt}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx^{(n-2)}}{da}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{dx^{(n-2)}}{db}\cdot\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{dx^{(n-2)}}{dc}\cdot\frac{dc}{dt}=0,\\
&\frac{dx^{(n-1)}}{da}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{dx^{(n-1)}}{db}\cdot\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{dx^{(n-1)}}{dc}\cdot\frac{dc}{dt}=Q
\end{aligned}$$

Il s'agit d'en tirer les valeurs de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, et c'est ce qu'on peut toujours faire à l'aide de la règle donnée par Laplace pour résoudre les équations du premier degré, quel que soit le nombre des inconnues.

D'après cette règle on formera d'abord le dénominateur commun des inconnues $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, à l'aide des coefficients $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}$, etc., de ces inconnues. On aura ensuite le numérateur de la fraction qui exprime $\frac{da}{dt}$, par exemple, en remplaçant dans le dénominateur commun $\frac{dx^{(n-1)}}{da}$ par Q, et $\frac{dx^{(n-2)}}{da}, \ldots \frac{dx'}{da}, \frac{dx}{da}$ par zéro.

On peut simplifier le calcul toutes les fois que la fonction P est indépendante de $x^{(n-1)}$, c'est-à-dire toutes les fois que $\frac{dP}{dx^{(n-1)}} = 0$. Je me propose dans cette Note de prouver qu'alors le dénominateur commun des quantités $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$, ne contient pas t explicitement et n'est fonction que de $a, b, \ldots c$; on verra même qu'il se réduit à l'unité lorsque $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs de $x, x', \ldots x^{(n-1)}$, relatives à une valeur particulière de t, telle que $t = 0$.

Pour donner de ce théorème une démonstration générale, je représente par u le dénominateur commun et je cherche sa dérivée $\frac{du}{dt}$ prise par rapport à t, en tant que cette lettre entre explicitement dans u, sans que l'on fasse varier les constantes $a, b, \ldots c$. La valeur de u se compose d'une série de termes, les uns positifs, les autres négatifs : le premier de ces termes est par exemple

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

D'après un théorème connu, la valeur de u doit devenir nulle si l'on rend égaux entre eux les coefficients de $\frac{da}{dt}$, ceux de $\frac{db}{dt}$,... ceux de $\frac{dc}{dt}$, dans deux des équations du problème. Si donc on remplace partout dans l'expression de u une des dérivées $x^{(i)}$ par une autre dérivée ayant un indice différent de i et compris dans la série $0, 1, 2, \ldots (n-1)$, il faudra que u se réduise à zéro après ce changement effectué.

Cela posé j'observe que, pour trouver $\frac{du}{dt}$, on peut différencier dans u successivement $x, x', \ldots x^{(n-2)}, x^{(n-1)}$, et ajouter les résultats partiels ainsi obtenus. Or, différencier x, c'est remplacer x par x', et par ce changement u devient zéro; de même différencier $x' \ldots$ ou $x^{(n-2)}$, c'est remplacer $x' \ldots$ ou $x^{(n-2)}$ par $x'' \ldots$ ou $x^{(n-1)}$, ce qui donne encore zéro pour résultat. Quant à la différenciation qui porte sur $x^{(n-1)}$, on l'effectuera en remplaçant $x^{(n-1)}$ par $x^{(n)}$ ou par P. Donc finalement la valeur de $\frac{du}{dt}$ se composera de termes de la forme

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdots \frac{dP}{dc}.$$

Mais P étant fonction de $t, x, x', \ldots x^{(n-1)}$, on a

$$\frac{dP}{dc} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} + \frac{dP}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dc} + \ldots + \frac{dP}{dx^{(n-1)}} \cdot \frac{dx^{(n-1)}}{dc}.$$

On trouve des valeurs semblables pour les dérivées $\frac{dP}{da}, \frac{dP}{db}, \ldots$ En les substituant dans l'expression de $\frac{du}{dt}$, celle-ci se décompose en plusieurs parties qui ont pour facteurs respectifs $\frac{dP}{dx}, \frac{dP}{dx'}, \ldots \frac{dP}{dx^{(n-1)}}$ et qui sont nulles d'elles-mêmes, comme il est aisé de le voir d'après ce que l'on a expliqué plus haut.

Donc enfin l'on a $\frac{du}{dt} = 0$, en sorte que le dénominateur u ne contient pas t explicitement, et se réduit à une simple fonction de $a, b, \ldots c$. Ainsi la valeur de u ne changera pas si l'on pose $t = 0$. Mais quand $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs initiales de $x, x', \ldots x^{(n-1)}$, le premier terme de u, savoir $\frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \ldots \frac{dx^{(n-1)}}{dc}$, se réduit à l'unité pour $t = 0$, et les autres deviennent nuls dans la même hypothèse : on a par suite alors $u = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

L'analyse précédente exige que P ne contienne pas la dérivée $x^{(n-1)}$, mais seulement les dérivées d'ordre inférieur à $(n - 1)$. Si P contenait $x^{(n-1)}$, on trouverait de la même manière

$$\frac{du}{dt} = u \frac{dP}{dx^{(n-1)}}.$$

Ces considérations générales deviennent beaucoup plus claires lorsqu'on les applique au cas particulier où $n = 3$.

On a alors

$$\begin{aligned} u = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx''}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dx''}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dx''}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dx''}{da}; \end{aligned}$$

et par le calcul direct, on trouve, en omettant les termes qui se détruisent, et en remplaçant x''' par P,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{dc} - \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{db} \\ & + \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{db} - \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{da} \cdot \frac{dP}{dc} \\ & + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dx'}{dc} \cdot \frac{dP}{da} - \frac{dx}{dc} \cdot \frac{dx'}{db} \cdot \frac{dP}{da}, \end{aligned}$$

expression qui devient nulle en effet, lorsqu'on met au lieu de $\frac{dP}{da}, \frac{dP}{db}, \frac{dP}{dc}$ leurs valeurs respectives

$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{da},$$
$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{db},$$
$$\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dP}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dc},$$

qui sont exactes dès que P est une fonction de t, x, x' indépendante de x''. Mais ces valeurs devraient être augmentées des termes suivants $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{da}$, $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{db}$, $\frac{dP}{dx''}\cdot\frac{dx''}{dc}$, si P contenait x''. Aussi dans ce cas $\frac{du}{dt}$ est $= u\frac{dP}{dx''}$ et non plus $= 0$.

En supposant P indépendant de $x^{(n-1)}$, et admettant que a, b, etc., soient les valeurs initiales de x, x', etc., on a

$$\frac{da}{dt} = -\,Q\frac{dx}{db},$$
$$\frac{db}{dt} = Q\frac{dx}{da},$$

pour $n = 2$; puis

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{dx}{db}\cdot\frac{dx'}{dc} - \frac{dx}{dc}\cdot\frac{dx'}{db}\right)Q,$$
$$\frac{db}{dt} = \left(\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dx'}{da} - \frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{dc}\right)Q,$$
$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{db} - \frac{dx}{db}\cdot\frac{dx'}{da}\right)Q,$$

pour $n = 3$; et ainsi de suite.

Lorsque $n = 2$, si Q est de la forme $-\frac{dR}{dx}$, R étant une fonction de t et x seulement, il vient

$$\frac{da}{dt} = \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{db} = \frac{dR}{db},$$
$$\frac{db}{dt} = -\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{da} = -\frac{dR}{da},$$

ce qui s'accorde avec les formules connues.

Les résultats que nous venons d'obtenir s'étendent de la manière suivante à un nombre quelconque d'équations différentielles simultanées. On peut toujours supposer que ces équations sont du premier ordre; car si elles contiennent des différentielles d'ordre supérieur, il suffira de représenter les intégrales de ces différentielles par des lettres particulières, que l'on traitera comme de nouvelles variables, pour rabaisser au premier ordre les équations proposées : par exemple l'équation

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = x_1^2 + t^2$$

peut être remplacée par ces trois équations du premier ordre

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 + t^2.$$

Soient donc en général x_1, $x_2, \ldots x_n$, n fonctions de t liées entre elles par n équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{P}_1, \ \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{P}_2, \ldots \ \frac{dx_n}{dt} = \mathrm{P}_n,$$

où P_1, $\mathrm{P}_2, \ldots \mathrm{P}_n$ désignent des fonctions de t, x_1, $x_2, \ldots x_n$. Désignons par a, $b, \ldots c$ les constantes arbitraires qui entreront dans les expressions de x_1, $x_2, \ldots x_n$, fournies par l'intégration des équations différentielles proposées. Enfin considérons les n équations

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{da}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dx_1}{db}\cdot\frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{dc}\cdot\frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_1,\\
&\frac{dx_2}{da}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dx_2}{db}\cdot\frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{dc}\cdot\frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_n}{da}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dx_n}{db}\cdot\frac{db}{dt} + \ldots + \frac{dx_n}{dc}\cdot\frac{dc}{dt} = \mathrm{Q}_n,
\end{aligned}$$

où nous prenons pour inconnues $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}, \ldots \frac{dc}{dt}$. Je dis qu'il est toujours facile de calculer *à priori* le dénominateur commun des fractions qui expriment ces inconnues. En effet, soit u ce dénominateur. D'après la règle de Laplace, il est formé d'une série de termes de la forme $\frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}$, pris avec des signes convenables. C'est pourquoi nous écrirons

$$u = \Sigma\left(\pm \frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right).$$

Cherchons maintenant $\frac{du}{dt}$. Il faudra pour cela différencier successivement $x_1, x_2, \ldots x_n$, par rapport à t : or la différenciation relative à x revient à remplacer x_1 par P_1, d'où résulte la quantité

$$\Sigma\left(\pm \frac{d\mathrm{P}_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right),$$

qui, développée, devient

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathrm{P}_1}{dx_1} \Sigma\left(\pm \frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right) \\ + & \frac{d\mathrm{P}_1}{dx_2} \Sigma\left(\pm \frac{dx_2}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & \frac{d\mathrm{P}_1}{dx_n} \Sigma\left(\pm \frac{dx_n}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right), \end{aligned}$$

et se réduit simplement à

$$u \frac{d\mathrm{P}_1}{dx_1},$$

parce que les sommes

$$\Sigma\left(\pm \frac{dx_2}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right), \ldots \ \Sigma\left(\pm \frac{dx_n}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}\right)$$

sont nulles en vertu d'une propriété bien connue. La valeur complète de $\frac{du}{dt}$ est donc

$$\frac{du}{dt} = u\left(\frac{d\mathrm{P}_1}{dx_1} + \frac{d\mathrm{P}_2}{dx_2} + \ldots + \frac{d\mathrm{P}_n}{dx_n}\right).$$

Toutes les fois que la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

se réduit à zéro, on a

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

en sorte que le dénominateur u est alors indépendant de t. Si donc on suppose que $a, b, \ldots c$ représentent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ pour $t = 0$, et si l'on prend positivement le terme $\frac{dx_1}{da} \cdot \frac{dx_2}{db} \ldots \frac{dx_n}{dc}$ de l'expression de u, on aura toujours $u = 1$. Mais quand, en adoptant cette dernière hypothèse, on regarde la somme

$$\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dP_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dx_n}$$

comme ayant une certaine valeur φ différente de zéro, alors il vient

$$u = e^{\int_0^t \varphi dt}.$$